Vorlesung 5b

Unabhängigkeit

Teil 5
Unabhängige Teilbeobachtungen
abhängiger Inputs

(vgl. Buch S. 68, Bsp. 1)

Sind X_1 und X_2 unabhängig,

dann auch $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$.

Denn:

$$\mathbf{P}(h_1(X_1) \in B_1, h_2(X_2) \in B_2)$$
$$= \mathbf{P}(X_1 \in h_1^{-1}(B_1), X_2 \in h_2^{-1}(B_2))$$
$$= \mathbf{P}(X_1 \in h_1^{-1}(B_1))\mathbf{P}(X_2 \in h_2^{-1}(B_2))$$
$$= \mathbf{P}(h_1(X_1) \in B_1)\, \mathbf{P}(h_2(X_2) \in B_2). \quad \square$$

Durch den Übergang zu

“Teilbeobachtungen” $h_1(X_1)$ und $h_2(X_2)$

können aber auch aus abhängigen Zufallsvariablen X_1, X_2

voneinander unabhängige Zufallsvariable

$h_1(X_1), h_2(X_2)$ entstehen:

Gewisse Teilaspekte von abhängigen Zufallsvariablen

können unabhängig sein:

Beispiel:

(X_1, X_2) seien rein zufällige “Zwei aus $\{1, 2, \ldots, 32\}$”.

Offenbar sind X_1 und X_2 nicht unabhängig.

Aber: die Ereignisse

$$E_1 := \{X_1 \in \{1, 9, 17, 25\}\}, \quad E_2 := \{1 \le X_2 \le 8\}.$$

sind unabhängig.

Denn

$$\mathbf{P}(E_1) = \tfrac{1}{8}\,, \mathbf{P}(E_2) = \tfrac{1}{4}\,, \mathbf{P}(E_1 \cap E_2) = \tfrac{1\cdot 7 + 3\cdot 8}{32\cdot 31} = \tfrac{1}{32}.$$

Als Anknüpfung an Teil 1 der heutigen Vorlesung geben wir hier auch die Tafel der 4 Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}(E_1 \cup E_2), \mathbf{P}(E_1 \cup E_2^c), \mathbf{P}(E_1^c \cup E_2), \mathbf{P}(E_1^c \cup E_2^c):$$

	E_2	E_2^c
E_1	$\frac{1\cdot7+3\cdot8}{32\cdot31}$	$\frac{1\cdot24+3\cdot23}{32\cdot31}$
E_1^c	$\frac{7\cdot7+21\cdot8}{32\cdot31}$	$\frac{7\cdot24+21\cdot23}{32\cdot31}$

Man sieht: Die Zeilen stehen im Verhältnis $1 : 7$,

die Spalten stehen im Verhältnis $1 : 3$.

Das kommt daher, dass der relative Anteil von $A_1 := \{1, 9, 17, 25\}$ in $A_2 := \{1, 2, \dots, 8\}$ ebenso groß ist wie der von A_1 in A_2^c.